

4. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie

$$(x + 2y + 3z)(2x + 3y + z)(3x + y + 2z) = 17^k$$

Szkic rozwiązania. Niech (x, y, z, k) będzie takim rozwiązaniem równania, dla którego suma $x + y + z + k$ jest najmniejsza. Lewa strona równania musi być potęgą liczby 17, zatem każdy z czynników iloczynu również musi nią być, w szczególności zachodzi zatem $17|x + 2y + 3z$, $17|2x + 3y + z$, $17|3x + y + 2z$, gdyż każda z tych liczb jest większa od 1. Dodając te liczby, dostajemy $17|6(x + y + z)$, czyli $17|x + y + z$. Mamy zatem $17|(3x + y + 2z) - ((x + 2y + 3z) - (x + y + z)) = 3x$, więc $17|x$, identycznie pokazujemy $17|y, z$. Ale w takim razie czwórka $(\frac{x}{17}, \frac{y}{17}, \frac{z}{17}, k - 3)$ również spełnia dane równanie, a jej suma elementów jest mniejsza od $x + y + z + k$, co jest sprzeczne. Równanie nie ma zatem żadnych rozwiązań. $\square$

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają zależność $ab + bc + ca = abc$. Udowodnić, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1$$

Szkic rozwiązania. Dokonajmy zamiany zmiennych $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Założenie w zadaniu przyjmuje formę $x + y + z = 1$, a nierówność tezy przyjmuje postać

$$\frac{(\frac{1}{x})^4 + (\frac{1}{y})^4}{\frac{1}{xy}((\frac{1}{x})^3 + (\frac{1}{y})^3)} + \frac{(\frac{1}{y})^4 + (\frac{1}{z})^4}{\frac{1}{yz}((\frac{1}{y})^3 + (\frac{1}{z})^3)} + \frac{(\frac{1}{z})^4 + (\frac{1}{x})^4}{\frac{1}{zx}((\frac{1}{z})^3 + (\frac{1}{x})^3)} = \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq 1$$

Udowodnimy następującą nierówność pomocniczą:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} \geq \frac{x + y}{2}$$

$$2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$$

$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0$$

$$(x^3 - y^3)(x - y) \geq 0$$

$$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest w oczywisty sposób prawdziwa, zatem nierówność pomocnicza jest udowodniona. Analogicznie prawdą jest również $\frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} \geq \frac{y + z}{2}$ i $\frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq \frac{z + x}{2}$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy $\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq \frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{2} + \frac{z + x}{2} = 1$. $\square$

6. Każdy punkt na płaszczyźnie pokolorowano na czerwono bądź niebiesko, przy czym spełniony jest następujący warunek: Jeżeli trzy niewspółliniowe punkty A, B, C są tego samego koloru, to środek okręgu wyznaczonego przez punkty A, B, C również jest punktem tego koloru.

Wykazać, że wszystkie punkty na płaszczyźnie są tego samego koloru.

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie istnieją dwa punkty różnych kolorów, czerwony punkt C i niebieski punkt N . Rozważmy okrąg o_1 o środku w punkcie C przechodzący przez N . Na o_1 może być co najwyżej jeszcze jeden punkt niebieski, zatem jesteśmy w stanie narysować taki okrąg o_2 , że jego środkiem jest punkt N , i przecina on okrąg o_1 w dwóch punktach czerwonych, oznaczmy te punkty przez C_1 i C_2 . Zauważmy, że wszystkie punkty okręgu o_2 poza C_1 i C_2 są niebieskie. Rozpatrzmy okrąg o_3 o środku C_1 przechodzący przez N . Tak zdefiniowany okrąg przecina okrąg o_2 w dwóch punktach, z których żaden nie jest punktem C_2 , czyli są to punkty niebieskie, oznaczmy je przez N_1 i N_2 . Ale w takim razie na o_3 są trzy punkty niebieskie, N, N_1 i N_2 , a jego środkiem jest czerwony punkt C_1 . Otrzymana sprzeczność zadaje kłam stwierdzeniu, że na płaszczyźnie są punkty dwóch kolorów, zatem wszystkie jej punkty są tego samego koloru. $\square$