

Półfinał treningowy - dzień 1

1. Wielomian P spełnia dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ równość

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$$

Udowodnić, że jeżeli wielomian P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy 0.

2. W trójkącie ABC przez D, E, F oznaczono spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z A na BC , z B na CA i z C na AB . Punkty P, Q, R, S są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na BA, BE, CF, CA . Udowodnij, że P, Q, R, S leżą na jednej prostej.
3. Układamy n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o długości boku 1 w trójkąt równoboczny o boku długości n . Każda z naszych płytek jest pokolorowana z jednej strony na czarno, a z drugiej na biało. Możemy wykonać ruch w następujący sposób: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema innymi płytkami, których widoczne strony mają kolor różny od widocznej strony płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla wszystkich $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające na wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.