

1. Wielomian P spełnia dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ równość

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$$

Udowodnić, że jeżeli wielomian P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy 0.

Szkic rozwiązania. Załóżmy, że P nie jest wielomianem zerowym i niech x_0 będzie jego pierwiastkiem o największej wartości bezwzględnej. Wtedy $0 = P(2x_0^3 + x_0)$, zatem $2x_0^3 + x_0$ również jest pierwiastkiem P , ale zauważmy, że $|2x_0^3 + x_0| \geq |x_0|$, więc zgodnie z doбором naszego pierwiastka nierówność ta musi być równością, czyli $x_0 = 0$. Zgodnie z rozkładem wielomianów zapiszmy więc $P(x) = x^k Q(x)$, gdzie $Q(0) \neq 0$. Podstawiając do równania w zadaniu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^k Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) &= (2x^3 + x)^k Q(2x^3 + x) \\ 2^k x^{3k} Q(x)Q(2x^2) &= x^k (2x^2 + 1)^k Q(2x^3 + x) \end{aligned}$$

Liczba 0 jest $3k$ -krotnym pierwiastkiem wyrażenia po lewej stronie, a k -krotnym wyrażenia po prawej, musi zatem zachodzić $3k = k$, więc $k = 0$. Otrzymujemy zatem sprzeczność, czyli P musi być wielomianem zerowym. $\square$

2. W trójkącie ABC przez D, E, F oznaczono spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z A na BC , z B na CA i z C na AB . Punkty P, Q, R, S są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na BA, BE, CF, CA . Udowodnij, że P, Q, R, S leżą na jednej prostej.

Szkic rozwiązania. Czworokąt $BCEF$ jest wpisany w okrąg, gdyż $\sphericalangle BFC$ i $\sphericalangle BEC$ są kątami prostymi. Z kątów opartych na łuku BF mamy więc $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BCF$. Podobnie, kąty $\sphericalangle DRS$ i $\sphericalangle DCS$ są proste, zatem $DCSR$ można wpisać w okrąg. Z kątów opartych na łuku DR otrzymujemy $\sphericalangle DCR = \sphericalangle DSR$, a łącząc tę równość z powyższą, dostajemy $\sphericalangle DSR = \sphericalangle BEF$. $DS \parallel BE$, gdyż obie te proste są prostopadłe do AC , co razem z pokazaną równością kątów daje nam $RS \parallel EF$. Zauważmy, że identyczne rozumowanie przeprowadzone dla czworokątów $BCEF$ i $DBPQ$ pokaże, że $PQ \parallel EF$.

Oznaczmy ortocentrum trójkąta ABC przez H . Zachodzi $DR \parallel AB$, gdyż obie te proste są prostopadłe do CF , z kątów naprzemianległych dostajemy $\sphericalangle FAH = \sphericalangle HDR$. Czworokąt $AEHF$ jest wpisany w okrąg, gdyż $\sphericalangle AFH$ i $\sphericalangle AEH$ są kątami prostymi. Zachodzi więc $\sphericalangle HAF = \sphericalangle HEF$. Analogicznie, $DRHQ$ jest wpisany w okrąg, gdyż kąty $\sphericalangle DQH$ i $\sphericalangle DRH$ są proste, zatem $\sphericalangle HDR = \sphericalangle HQR$. Mamy więc $\sphericalangle HEF = \sphericalangle HAF = \sphericalangle HDR = \sphericalangle HQR$, czyli są to kąty naprzemianległe, zatem $QR \parallel EF$.

Z otrzymanych zależności $PQ \parallel EF, QR \parallel EF, RS \parallel EF$ natychmiast otrzymujemy tezę zadania. $\square$

3. Układamy n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o długości boku 1 w trójkąt równoboczny o boku długości n . Każda z naszych płytek jest pokolorowana z jednej strony na czarno, a z drugiej na biało. Możemy wykonać ruch w następujący sposób: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema innymi płytkami, których widoczne strony mają kolor różny od widocznej strony płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla wszystkich $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające na wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

Szkic rozwiązania. Krawędzią *graniczną* będziemy nazywać wspólny bok dwóch płytek, których widoczne strony są różnych kolorów. Zauważmy, że liczba krawędzi granicznych określona jest nieujemną liczbą całkowitą, nieprzekraczającą liczby wszystkich wspólnych krawędzi między naszymi płytkami.

Aby wykonanie ruchu daną płytką było możliwe, musi ona sąsiadować z dwiema płytkami innego koloru, czyli posiada co najmniej dwie krawędzie graniczne. Przypuśćmy, że wykonujemy ruch pewną płytką P . Zaobserwujemy następujące fakty: po pierwsze, zmienić mogą się właściwości jedynie krawędzi płytki P , po drugie, jeżeli przed wykonaniem ruchu dana krawędź była krawędzią graniczną, to po wykonaniu ruchu nią nie będzie, i odwrotnie - krawędź, która nie była krawędzią graniczną, takową się staje. To oznacza, że przy wykonaniu ruchu co najmniej dwie krawędzie graniczne znikają, a pojawia się co najwyżej jedna nowa, więc liczba krawędzi granicznych wraz z każdym ruchem maleje. W takim razie liczba ruchów jest ograniczona przez początkową liczbę krawędzi granicznych i nie istnieje żadne ułożenie, dla którego można wykonać nieskończony ciąg ruchów. $\square$