



Obóz matematyczny - Pomorzanka listopad 2025

Konkurs seniorski obozu matematycznego we Władysławowie

Dzień 1

1. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie kąty wewnętrzne mają taką samą miarę. Udowodnić, że $AB + BC = DE + EF$.
2. Liczby $a, b, c \geq 0$ spełniają $a + b + c = 3$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

3. Dana jest liczba naturalna m . Definiujemy ciąg a_n w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = m \\ a_{n+1} = ma_n + \sqrt{(m^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.



Obóz matematyczny - Pomorzanka listopad 2025

Konkurs seniorski obozu matematycznego we Władysławowie

Dzień 2

4. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$
5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , przy czym $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie V , natomiast D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z A . Okrąg opisany na trójkącie AVD przecina boki AB oraz AC w punktach odpowiednio E i F . Pokazać, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
6. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \in \mathbb{R}^+$ będą takie, że $x^n + y^n = 1$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$



Obóz matematyczny - Pomorzanka listopad 2025

Konkurs seniorski obozu matematycznego we Władysławowie

Dzień 3

7. Udowodnić, że jeżeli $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, to $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.
8. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AA' , BB' , CC' są wysokościami. Udowodnić, że
- $$A'B' + B'C' + C'A' \leq 2 \cdot AA'$$
9. Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Czy istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$, która jest względnie pierwsza ze wszystkimi wyrazami ciągu a_n ?



Obóz matematyczny - Pomorzanka listopad 2025

Konkurs seniorski obozu matematycznego we Władysławowie

Dzień 4

10. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a P punktem na krótszym łuku AC okręgu opisanego na ABC . Udowodnić, że $PB = PA + PC$.
11. Liczby dodatnie x i y spełniają $x^3 + y^3 = x^5 + y^5$. Wykazać, że

$$x^2 + y^2 \leq 1 + xy$$

12. Rozważmy wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $0 < k \leq n$. W każdym z tych podzbiorów wybieramy liczbę najmniejszą. Wyznaczyć średnią arytmetyczną wszystkich wybranych w ten sposób liczb.