

1. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie kąty wewnętrzne mają taką samą miarę. Udowodnić, że $AB + BC = DE + EF$.

Szkic rozwiązania. Oczywiście miara kąta $ABCDEF$ wynosi 120° . Przedłużmy boki BC, DE, FA danego sześciokąta i oznaczmy przecięcia boków BC, FA przez K , DE, BC przez L , FA, DE przez M . Z rachunku kątów trójkąty AKB, CLD, EMF, KLM są trójkątami równobocznymi. Mamy zatem

$$AB + BC = KB + BC = KC = KL - LC = LM - LD = MD = DE + ME = DE + EF$$

□

2. Liczby $a, b, c \geq 0$ spełniają $a + b + c = 3$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Szkic rozwiązania. Przekształćmy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\frac{a}{b^2 + 1} = \frac{a(b^2 + 1) - ab^2}{b^2 + 1} = a - \frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Analogicznie $\frac{b}{c^2 + 1} \geq b - \frac{bc}{2}$, $\frac{c}{a^2 + 1} \geq c - \frac{ca}{2}$. Z przekształconej nierówności średnich $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, napiszmy zatem

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\frac{3}{2} \geq \frac{(ab + bc + ca)}{2}$$

Wracając do nierówności postawionej w tezie, dostajemy

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq a - \frac{ab}{2} + b - \frac{bc}{2} + c - \frac{ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

□

3. Dana jest liczba naturalna m . Definiujemy ciąg a_n w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = m \\ a_{n+1} = ma_n + \sqrt{(m^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

Szkic rozwiązania. Przekształcając podany w zadaniu wzór rekurencyjny, otrzymujemy

$$(a_{n+1} - ma_n)^2 = (m^2 - 1)(a_n^2 - 1) \quad (1)$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} (a_n - ma_{n-1})^2 &= (m^2 - 1)(a_{n-1}^2 - 1) \\ a_n^2 - 2ma_na_{n-1} + m^2a_{n-1}^2 &= m^2a_{n-1}^2 - m^2 - a_{n-1}^2 + 1 \\ a_n^2 + m^2 - 1 &= -a_{n-1}^2 + 2ma_na_{n-1} \\ a_n^2 + m^2 - 1 - m^2a_n^2 &= -a_{n-1}^2 + 2ma_na_{n-1} - m^2a_n^2 \\ (m^2 - 1)(1 - a_n^2) &= -(a_{n-1} - ma_n)^2 \\ (m^2 - 1)(a_n^2 - 1) &= (a_{n-1} - ma_n)^2 \end{aligned}$$

Korzystając z (1) otrzymujemy $(a_{n+1} - ma_n)^2 = (a_{n-1} - ma_n)^2$. Ze wzoru danego w zadaniu wynika $a_{n+1} - ma_n \geq 0$, $a_{n-1} - ma_n \leq 0$, więc zachodzi równość $a_{n+1} - ma_n = ma_n - a_{n-1} \implies a_{n+1} = 2ma_n - a_{n-1}$. Obliczając $a_1 = m, a_2 = 2m^2 - 1$, z dalszej prostej indukcji wynika teza zadania. □

4. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$

Szkic rozwiązania. Podnieśmy nierówność obustronnie do potęgi $n(n+1)$:

$$(n!)^{n+1} < (n+1)!^n = ((n+1)n!)^n = (n+1)^n \cdot (n!)^n$$

$$n! < (n+1)^n$$

Jednocześnie w oczywisty sposób zachodzi $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n < n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n < (n+1)^n$. □

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , przy czym $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie V , natomiast D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z A . Okrąg opisany na trójkącie AVD przecina boki AB oraz AC w punktach odpowiednio E i F . Pokazać, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Szkic rozwiązania. Z definicji wyboru punktów zachodzi $AD \perp VD$, zatem AV jest średnicą okręgu opisanego na AVD . Z tego od razu $AE \perp VE$ oraz $AF \perp VF$. Zachodzi $\sphericalangle EAV = \sphericalangle FAV$ (AV jest dwusieczną), a zatem $AE = AF$ oraz $VE = VF$. Mamy więc

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{CE}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{VE \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle ACB}{VF \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle ABC} \cdot \frac{AD \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle ABC}{AD \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle ACB} = 1$$

co z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy daje tezę zadania. □

6. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \in \mathbb{R}^+$ będą takie, że $x^n + y^n = 1$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

Szkic rozwiązania. Pokażemy, że dla liczb $t \in (0; 1)$ zachodzi $\frac{1+t^2}{1+t^4} < \frac{1}{t}$. Istotnie, w tym przedziale

$$(1-t)(1-t^3) > 0$$

$$1-t-t^3+t^4 > 0$$

$$1+t^4 > t(1+t^2)$$

$$\frac{1}{t} > \frac{1+t^2}{1+t^4}$$

Korzystając z powyższego, możemy napisać od razu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1+t^{2k}}{1+t^{4k}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{t^k} = \frac{\frac{1}{t^{n+1}} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{1-t^n}{t^n(1-t)}$$

Wracając do tezy zadania

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1-x^n}{x^n(1-x)} \frac{1-y^n}{y^n(1-y)} = \frac{y^n}{x^n(1-x)} \frac{x^n}{y^n(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

□

7. Udowodnić, że jeżeli $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, to $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Szkic rozwiązania. Pomnożmy pierwszą równość daną w zadaniu przez $a \cdot b$ i c :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ca}{a+b} = a$$

$$\frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{bc}{a+b} = b$$

$$\frac{ca}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = c$$

Dodając wszystkie powyższe równania, dostajemy

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ca}{a+b} + \frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{b(c+a)}{c+a} + \frac{c(a+b)}{a+b} + \frac{a(b+c)}{b+c} = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + a + b + c = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

□

8. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AA' , BB' , CC' są wysokościami. Udowodnić, że

$$A'B' + B'C' + C'A' \leq 2 \cdot AA'$$

Szkic rozwiązania. Niech odpowiednio X i Y będą odbiciami punktu A' względem prostych AB i AC . Okrąg o średnicy AC musi przechodzić przez punkty A' , C' , zatem $\angle BC'A' = 180^\circ - \angle AC'A' = \angle ACB$ oraz analogicznie $\angle AC'B' = \angle ACB$. W takim razie zachodzi $\angle AC'B' = \angle XC'B$, więc punkt X leży na prostej $B'C'$; dokładną analogią pokazujemy, że Y również leży na $B'C'$. Zachodzi więc $A'B' + B'C' + C'A' = YB' + B'C' + C'X = YX$. Ale z nierówności trójkąta $YX \leq YA + AX = 2 \cdot AA'$. □

9. Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Czy istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$, która jest względnie pierwsza ze wszystkimi wyrazami ciągu a_n ?

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że możemy ograniczyć poszukiwanie liczby m do liczb pierwszych, wybierzmy zatem dowolną liczbę pierwszą p . Dla $p = 2, 3$ sprawdzamy ręcznie, że $2|a_1$ oraz $3|a_2$, dalej $p > 3$. Zauważmy, że w $\mathbb{R}$ zachodzi $2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 = 0$, i rozpatrzmy analogiczną liczbę modulo p korzystając z małego twierdzenia Fermata:

$$\begin{aligned} 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 &\equiv 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 6^{p-2}((3^{p-2})^{-1} + (2^{p-2})^{-1} + 1) - 1 \equiv \\ &\equiv 6^{p-2}((3^{-1})^{-1} + (2^{-1})^{-1} + 1) - 1 \equiv 6^{p-2}((3 + 2 + 1) - 1) \equiv 6^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

To oznacza, że dla każdej liczby $p > 3$ zachodzi $p|a_{p-2}$, zatem nie istnieje żadna liczba m spełniająca warunki zadania. □

10. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a P punktem na krótszym łuku AC okręgu opisanego na ABC . Udowodnić, że $PB = PA + PC$

Szkic rozwiązania. Niech D będzie przecięciem odcinków AC i BP . Czworokąt $APCB$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$, oczywiście $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABP$, zatem z rachunku kątów $\triangle ABD \sim \triangle PBA$. Analogicznie pokazujemy $\triangle CBD \sim \triangle PBC$. Możemy zapisać następujące stosunki boków dla naszych podobieństw: $\frac{PA}{AD} = \frac{PB}{AB}$ oraz $\frac{PC}{CD} = \frac{PB}{BC}$. Odpowiednio przekształcając, wyznaczamy $PA = \frac{PB}{AB} \cdot AD$ i $PC = \frac{PB}{BC} \cdot CD = \frac{PB}{AB} \cdot CD$, więc $PA + PC = \frac{PB}{AB} \cdot AD + \frac{PB}{AB} \cdot CD = \frac{PB}{AB} \cdot AC = PB$. $\square$

11. Liczby dodatnie x i y spełniają $x^3 + y^3 = x^5 + y^5$. Wykazać, że

$$x^2 + y^2 \leq 1 + xy$$

Szkic rozwiązania. Pomnożymy nierówność przez $x^3 + y^3$:

$$\begin{aligned} x^5 + x^2y^3 + y^2x^3 + y^5 &\leq x^3 + y^3 + x^4y + xy^4 \\ x^2y^2(x+y) &\leq xy(x^3 + y^3) \\ 0 &\leq (x+y)(x^2 + xy + y^2 - xy) = (x+y)(x-y)^2 \end{aligned}$$

$\square$

12. Rozważmy wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $0 < k \leq n$. W każdym z tych podzbiorów wybieramy liczbę najmniejszą. Wyznaczyć średnią arytmetyczną wszystkich wybranych w ten sposób liczb.

Szkic rozwiązania. Lemat. $\binom{n}{k} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1}$

Udowodnimy lemat, korzystając ze wzoru $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \dots = \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k+1}{k} = \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} = \\ &= \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1} \end{aligned}$$

Sprawdźmy, ile istnieje k -elementowych zbiorów, których najmniejszym elementem jest j . Do tego elementu należy dobrać jeszcze $k-1$ elementów, które wszystkie są większe od j , co możemy zrobić na $\binom{n-j}{k-1}$ sposobów. Możemy zatem policzyć pożądaną średnią: wynosi ona

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} j \binom{n-j}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

Rozpatrzmy licznik otrzymanego ułamka:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-k+1} j \binom{n-j}{k-1} &= \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} + \sum_{j=2}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} + \sum_{j=3}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} + \dots + \sum_{j=n-k+1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie $\frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} j \binom{n-j}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k+1}$. $\square$