

1. Załóżmy, że liczba $x \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$. Obliczyć wartość wyrażenia $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Szkic rozwiązania. Podnosząc daną równość do trzeciej potęgi, otrzymujemy

$$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 7\sqrt{7}$$

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 7\sqrt{7}$$

$$x^3 + 3\sqrt{7} + \frac{1}{x^3} = 7\sqrt{7}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 4\sqrt{7}$$

□

2. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} (y+z)(x+y+z) = 2 \\ (z+x)(x+y+z) = 6 \\ (x+y)(x+y+z) = 10 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania. Dodajmy wszystkie równania stronami. Otrzymujemy w efekcie $2(x+y+z)^2 = 18$, zatem $x+y+z = 3$ bądź $x+y+z = -3$. Rozpatrzmy najpierw przypadek $x+y+z = 3$, wtedy z pierwszego równania $(3-x) \cdot 3 = 2$, zatem po przekształceniach dostajemy $x = \frac{7}{3}$. W drugim równaniu mamy więc $(z + \frac{7}{3}) \cdot 3 = 6$, z czego $z = -\frac{1}{3}$, i ostatecznie $y = 1$. Dla przypadku $x+y+z = -3$ w analogiczny sposób otrzymujemy $x = -\frac{7}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, $y = -1$. Dwoma rozwiązaniami układu są zatem trójki $(\frac{7}{3}, 1, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{7}{3}, -1, \frac{1}{3})$. □

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie kąty wewnętrzne mają taką samą miarę. Udowodnić, że $AB + BC = DE + EF$.

Szkic rozwiązania. Oczywiście miara kąta $ABCDEF$ wynosi 120° . Przedłużmy boki BC, DE, FA danego sześciokąta i oznaczmy przecięcia boków BC, FA przez K , DE, BC przez L , FA, DE przez M . Z rachunku kątów trójkąty AKB, CLD, EMF, KLM są trójkątami równobocznymi. Mamy zatem

$$AB + BC = KB + BC = KC = KL - LC = LM - LD = MD = DE + ME = DE + EF$$

□

4. Bartek z Asią zebrali trzy razy więcej grzybów niż Kacper, natomiast Asia wraz z Kacprem - pięć razy więcej grzybów niż Bartek. Kto zbierał więcej grzybów: Bartek razem z Kacper, czy Asia?

Szkic rozwiązania. Niech a będzie liczbą grzybów zebranych przez Asię, b przez Bartka, k przez Kacpra. Wtedy możemy napisać

$$\begin{cases} a + b = 3k \\ a + k = 5b \end{cases}$$

Dodając równania stronami, dostajemy $2a + b + k = 3k + 5b \implies 2a = 2k + 4b \implies a = k + 2b$. Ale wiemy, że $b > 0$, gdyż w przeciwnym razie okazałoby się, że nikt nie zebrał żadnego grzyba, a zatem $a = k + 2b > k + b$, czyli Asia zebrała więcej grzybów niż Bartek i Kacper razem wzięci. $\square$

5. Niech r i R oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego oraz opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości a i b . Udowodnić, że $a + b = 2(r + R)$.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez A, B, C , gdzie C jest wierzchołkiem przy kącie prostym, a długość przeciwprostokątnej przez $AB = c$. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego, zatem $c = 2R$. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w nasz trójkąt, a D, E, F jego punktami styczności odpowiednio z bokami AB, BC, CA . Czworokąt $CEIF$ jest kwadratem, gdyż ma wszystkie kąty proste i dwa boki równe, więc $CE = CF = r$. Ze względu na styczność, zachodzą równości $AD = AF = AC - CF = AC - r$ oraz $BD = BC - BE = BC - r$. Dodajmy te równania:

$$AD + BD = AC - r + BC - r \implies AB + 2r = AC + BC \implies 2R + 2r = a + b$$

$\square$

6. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$

Szkic rozwiązania. Podnieśmy nierówność obustronnie do potęgi $n(n+1)$:

$$(n!)^{n+1} < (n+1)!^n = ((n+1)n!)^n = (n+1)^n \cdot (n!)^n$$

$$n! < (n+1)^n$$

Jednocześnie w oczywisty sposób zachodzi $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n < n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n < (n+1)^n$. $\square$

7. Rozpoczynając od pewnej liczby naturalnej, wypisano pięć kolejnych jej wielokrotności. Suma trzech najmniejszych z nich wynosi 6666. Ile wynosi suma trzech największych z tych wielokrotności?

Szkic rozwiązania. Niech naszą liczbą naturalną będzie n . Zauważmy, że pięć kolejnych jej wielokrotności w zadaniu to liczby $n, 2n, 3n, 4n, 5n$. W takim razie suma najmniejszych trzech z nich to $n + 2n + 3n = 6666 \implies 6n = 6666$. Suma trzech największych wielokrotności to $3n + 4n + 5n = 12n = 2 \cdot 6n = 2 \cdot 6666 = 13332$. $\square$

8. Wykazać, że w pięciokącie wypukłym każdy kąt jest mniejszy od połowy sumy pozostałych kątów.

Szkic rozwiązania. W pięciokącie suma kątów wynosi 540° . Wybierzmy pewien kąt tego pięciokąta i oznaczmy przez α . Jako że jest to pięciokąt wypukły, $\alpha < 180^\circ$. Oznaczmy sumę pozostałych kątów tego pięciokąta przez S . Zachodzi w takim razie $\alpha + S = 540^\circ$. Ale używając powyższej nierówności $S + \alpha < S + 180^\circ \implies 540^\circ < S + 180^\circ \implies 360^\circ < S \implies 180^\circ < \frac{S}{2}$. Z tego natychmiast otrzymujemy więc $\alpha < 180^\circ < \frac{S}{2}$, czyli nasz kąt jest mniejszy od połowy sumy pozostałych kątów. $\square$

9. Udowodnić, że jeżeli $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, to $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Szkic rozwiązania. Pomnożmy pierwszą równość daną w zadaniu przez $a \cdot b$ i c :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ca}{a+b} = a$$

$$\frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{bc}{a+b} = b$$

$$\frac{ca}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = c$$

Dodając wszystkie powyższe równania, dostajemy

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ca}{a+b} + \frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{b(c+a)}{c+a} + \frac{c(a+b)}{a+b} + \frac{a(b+c)}{b+c} = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + a + b + c = a + b + c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

$\square$

10. Czy istnieje liczba naturalna $n \geq 1$ taka, że n^3 jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych?

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że teza zadania jest prawdziwa. Wtedy istnieje liczba naturalna k taka, że $n^3 = (k-1)k(k+1)$. Rozważmy, jaką liczbą musi być wtedy k . Jeżeli $k = n$, to $n^3 = (k-1)k(k+1) = (n-1)n(n+1) = n(n^2-1) = n^3 - n < n^3$, co jest sprzeczne, czyli $k > n$. Jednocześnie gdy $k = n+1$, $n^3 = (k-1)k(k+1) = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n > n^3$, co również jest sprzeczne, zatem $k < n+1$. Ale nie istnieje żadna liczba naturalna pomiędzy n i $n+1$, więc otrzymujemy sprzeczność, która dowodzi, że szukana w zadaniu liczba n nie istnieje. $\square$

11. Dana jest lista n zdań. Zdanie o numerze k (gdzie $k = 1, 2, \dots, n$) brzmi "na tej liście jest dokładnie k zdań fałszywych". Które spośród zdań na tej liście są prawdziwe?

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że żadne dwa zdania napisane na liście nie mogą być jednocześnie prawdziwe. To oznacza, że zdań prawdziwych jest 0 bądź 1. Z drugiej strony, co najmniej jedno zdanie na pewno musi być prawdziwe, bo jeżeli wszystkie n zdań byłyby fałszywe, zdanie o numerze n jest prawdziwe - sprzeczność. W takim razie dokładnie jedno zdanie jest prawdziwe, więc $n-1$ zdań jest fałszywych, a zatem naszym jedynym prawdziwym zdaniem jest zdanie o numerze $n-1$. $\square$

12. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a P punktem na krótszym łuku AC okręgu opisanego na ABC . Udowodnić, że $PB = PA + PC$

Szkic rozwiązania. Niech D będzie przecięciem odcinków AC i BP . Czworokąt $APCB$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$, oczywiście $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABP$, zatem z rachunku kątów $\triangle ABD \sim \triangle PBA$. Analogicznie pokazujemy $\triangle CBD \sim \triangle PBC$. Możemy zapisać następujące stosunki boków dla naszych podobieństw: $\frac{PA}{AD} = \frac{PB}{AB}$ oraz $\frac{PC}{CD} = \frac{PB}{BC}$. Odpowiednio przekształcając, wyznaczamy $PA = \frac{PB}{AB} \cdot AD$ i $PC = \frac{PB}{BC} \cdot CD = \frac{PB}{AB} \cdot CD$, więc $PA + PC = \frac{PB}{AB} \cdot AD + \frac{PB}{AB} \cdot CD = \frac{PB}{AB} \cdot AC = PB$. $\square$