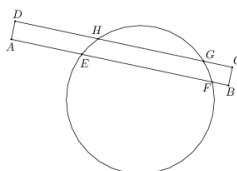


-
1. Licznik oraz mianownik pewnego ułamka są dodatnimi liczbami całkowitymi, których suma wynosi 2011. Ułamek ten jest mniejszy od $\frac{1}{3}$. Znajdź największy taki ułamek.

-
2. Istnieje dokładnie jeden sposób na zapisanie liczby 2013 jako sumy dwóch liczb pierwszych. Jaki jest iloczyn tych liczb?

-
3. Prostokąt $ABCD$ przecina dany okrąg w punktach E, F, G, H jak na rysunku, przy czym $AE = 3, DH = 4, GH = 5$. Znajdź EF .



-
4. Ile wynosi suma cyfr liczby $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \dots + 1\underbrace{0\dots0}_{50}1$?

-
5. W szufladzie znajdują się koszulki w trzech kolorach: czerwonym, szarym oraz niebieskim. Czerwonych koszulek jest o sześć mniej niż koszulek szarych i niebieskich razem, natomiast koszulek szarych jest o dziesięć mniej niż koszulek czerwonych i niebieskich razem. Ile jest niebieskich koszulek w szufladzie?

-
6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b spełniają równania:

$$a + \frac{1}{b} = 7 \text{ oraz } b + \frac{1}{a} = 5.$$

Ile wynosi $ab + \frac{1}{ab}$?

-
7. Łukasz znalazł sześciocyfrową liczbę o następujących własnościach:

- Jest palindromem.
- Jest podzielna przez 9.
- Skreślając pierwszą oraz ostatnią cyfrę tej liczby, otrzymujemy liczbę, której jedynym czynnikiem pierwszym jest 11.

Jaką liczbę znalazł Łukasz?

-
8. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2 oraz punkt X na zawierającej go płaszczyźnie, leżący poza kwadratem, taki, że $|AX| = |XB| = \sqrt{2}$. Jaka jest długość najdłuższej przekątnej pięciokąta $AXBCD$?

-
9. Suma liczb całkowitych x, y jest nie większa niż 200, a ich różnica mniejsza niż 100. Jaka jest największa możliwa wartość wyrażenia $2 \cdot \min(x, y) + \max(x, y)$?

-
10. Znajdź dodatnią liczbę całkowitą n spełniającą równanie $6666^2 + 8888^2 = n^2$.

-
11. Na ile sposobów można pokolorować ściany sześcianu dwoma kolorami? Dwa kolorowania uznajemy za identyczne, jeżeli można przejść od jednego do drugiego poprzez obracanie sześcianu.

-
12. Dla ilu liczb całkowitych a ($1 \leq a \leq 2025$) liczba a^a jest kwadratem liczby całkowitej?

-
13. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, złożona z cyfr 0 i 1, która jest podzielna przez 225?

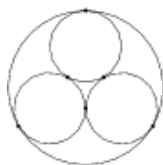
-
14. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równanie $\frac{x-y}{z-y} = -10$. Ile wynosi $\frac{x-z}{y-z}$?

-
15. Dany jest trójkąt o bokach długości 3, 5, 7. Jaki promień ma najmniejsze możliwe koło, które w całości zakrywa ten trójkąt?

-
16. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią podzielną przez 17, o sumie cyfr równej 17 i której ostatnie dwie cyfry to 17.

-
17. Do każdego pola tabeli o wymiarach 10×10 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że spośród wszystkich możliwych iloczynów dwóch różnych pól tej tabeli dokładnie 1000 jest ujemnych. Ile zer wpisano do tabeli? Podaj wszystkie możliwości.

-
18. Dane są trzy okręgi o promieniu 1, parami styczne zewnętrznie. Wszystkie trzy okręgi są wpisane w większy okrąg ω , to znaczy każdy z trzech mniejszych okręgów jest wewnętrznie styczny do większego okręgu. Ile wynosi promień okręgu ω ?



-
19. Niech p będzie rozwiązaniem tego zadania. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że dowolnie wybrany punkt wewnątrz kwadratu o boku długości 1 będzie odległy o co najmniej p od każdego z jego boków?

-
20. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Cyfra dziesiątek liczby n^2 to 7. Jaka jest jej cyfra jedności?

-
21. Pole prostokąta $ABCD$ wynosi 80, a długość jego przekątnej 16. Znajdź sinus kąta przekątnymi tego prostokąta.

-
22. Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych (x, y, z) , które spełniają równania $(x + y)(x + y + z) = 120$, $(y + z)(x + y + z) = 96$, $(z + x)(x + y + z) = 72$.

-
23. W pola kwadratu o wymiarach 3×3 wpisano liczby całkowite w taki sposób, że sumy liczb w wierszach zwiększają się o 2, idąc w dół, a sumy liczb w kolumnach stają się dwa razy większe, idąc w prawo. Wiemy, że suma liczb w jednym z wierszy wynosi 2011. Ile wynosi suma liczb w pierwszej kolumnie od lewej?

-
24. Na dwóch brzegach rzeki przycumowane są dwie łodzie. Obie zaczynają płynąć w swoim kierunku ze stałą prędkością (niekoniecznie taką samą). Spotykają się po raz pierwszy 100 metrów od jednego z brzegów rzeki. Po dopłynięciu do brzegu, obie łodzie zawracają i znowu ruszają w swoim kierunku. Tym razem spotykają się 70 metrów od drugiego z brzegów rzeki. Jak szeroka jest ta rzeka?

-
25. Znajdź liczbę x spełniającą równanie $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$

-
26. Ile istnieje trójek dodatnich liczb całkowitych (a, b, c) spełniających równanie

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

jeżeli $a + b + c \leq 30$?

-
27. Dany jest trapez o podstawach długości 5 i 2 oraz ramionach długości 3 i $3\sqrt{2}$. Wyznacz jego pole.

-
28. Michał zapisał liczby od 1 do 100 w losowej kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, 50$ liczba na miejscu $2i - 1$ jest mniejsza niż liczba na miejscu $2i$?

-
29. Znajdź sumę wszystkich możliwych liczb rzeczywistych a , dla których równania $x^2 + ax + 1 = 0$ oraz $x^2 + x + a = 0$ mają co najmniej jeden wspólny pierwiastek.

-
30. Dany jest okrąg ω o promieniu 1, środku O i średnicy AC . Prosta l przechodzi przez O i jest prostopadła do AC . Niech U będzie punktem na prostej l leżącym poza okręgiem ω . Oznaczmy przez B drugi punkt przecięcia AU z okręgiem ω oraz $BU = 1$. Oblicz długość OU .

-
31. Dane są liczby rzeczywiste a, b takie, że $a > b > 0$ oraz

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2025$$

Oblicz $\frac{a+b}{a-b}$.

-
32. Ile istnieje liczb ośmiocyfrowych, dla których po wykreśleniu pierwszej cyfry otrzymujemy liczbę 35 razy mniejszą od początkowej?

-
33. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o bokach $AB = 4\pi$, $BC = 4\pi + 3$, $CA = 4\pi + 6$. Oznaczmy spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A przez D . Oblicz $CD - BD$.

-
34. Znajdź największą liczbę naturalną n taką, że $7^{2048} - 1$ jest podzielne przez 2^n .

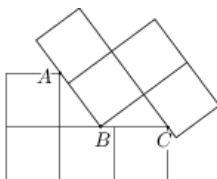
-
35. Dodatnią sześciocyfrową liczbę całkowitą nazwiemy *podwójną*, jeżeli jej pierwsze trzy cyfry są takie same, jak pozostałe trzy cyfry (włącznie z kolejnością), na przykład 227227 jest liczbą podwójną, lecz 135153 taką nie jest. Ile liczb podwójnych jest podzielnych przez 2013?

-
36. Na każdej ze ścian sześcianu napisano dodatnią liczbę całkowitą. Następnie do każdego z wierzchołków sześcianu przypisano iloczyn liczb napisanych na trzech ścianach spotykających się w tym wierzchołku. Suma liczb przypisanych do wierzchołków wynosi 165. Ile wynosi suma liczb na ścianach sześcianu?
-

37. Tomek dostał pudełko z trzydziestoma czekoladkami, ułożonymi w trzech rzędach po dziesięć. Zjada swoje czekoladki po jednej na raz w taki sposób, że liczba czekoladek w każdym dwóch rzędach różni się o co najwyżej 1. Na ile sposobów Tomek może zjeść swoje czekoladki?
-

38. Rozważmy 27 punktów w sześciacie: jego wierzchołki, środki jego krawędzi, środki jego ścian oraz sam środek sześcianu. Ile jest prostych przechodzących przez dokładnie 3 z podanych punktów?
-

39. Dwa tetromina złożone z kwadratów wymiaru 1×1 stykają się w punktach A, B, C jak na rysunku. Wyznacz długość AB .



-
40. Zapisz ułamek $\frac{212121210}{112121211}$ w formie nieskracalnej.
-

41. Rozważmy dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyrażenie

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}$$

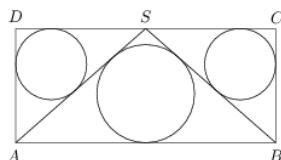
Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą $k \geq 2$ taką, że $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_k > 4$.

42. Po poboczu idzie autostopowicz. Prawdopodobieństwo, że w przeciągu 20 minut złapie jakiś samochód, wynosi $\frac{609}{625}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda mu się złapać jakiś samochód w przeciągu 5 minut, jeżeli prawdopodobieństwo złapania podwózki jest w każdym momencie takie same?

-
43. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równanie $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 14^2$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość $x^2 + y^2$.

-
44. Maciek ma kostkę 20-ścienną, a jego kolega Karol trzy kostki sześciennie. Jakie jest prawdopodobieństwo po rzuceniu wszystkimi kośćmi, że Maciek wyrzuci na swojej kostce liczbę większą niż suma rzutów wszystkich trzech kości Karola?

-
45. Niech S będzie środkiem boku CD prostokąta $ABCD$. Okręgi wpisane w trójkąty ASD i BSC mają promienie długości 3, a promień okręgu wpisanego w trójkąt ASB wynosi 4. Wyznacz długości boków prostokąta.



-
46. Liczba rzeczywista x spełnia równanie

$$\frac{x - 49}{50} + \frac{x - 50}{49} = \frac{50}{x - 49} + \frac{49}{x - 50}.$$

Ile wynosi x ? Podaj wszystkie możliwości.

-
47. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi, różnymi od zera, takimi, że równania kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ oraz $bx^2 + cx + a = 0$ mają wspólny pierwiastek. Znajdź wszystkie możliwe rzeczywiste wartości owego pierwiastka.

-
48. Czternastokąt foremny $A_1A_2 \dots A_{14}$ jest wpisany w koło k o promieniu 1. Ile wynosi pole części tego koła zawartej wewnątrz kąta $\angle A_1A_4A_{14}$?

-
49. Wyznacz największą liczbę całkowitą $n \leq 4000000$, dla której liczba $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}$ jest wymierna.

-
50. Znajdź wszystkie liczby całkowite n , dla których obie liczby $16n + 9$ oraz $9n + 16$ są kwadratami liczb całkowitych.
-